Całkowanie 1

1 Jeśli gaz doskonały ulega adiabatycznej kompresji lub rozprężaniu, nie ma utraty ciepła, a niewielka zmiana δT temperatury T jest powiązana z niewielką zmianą δV objętości V zgodnie z równaniem

$$\frac{\delta T}{T} = -(\gamma - 1)\frac{\delta V}{V},$$

gdzie $\gamma = \dfrac{C_P}{C_V}$ i gdzie C_P oraz C_V to ciepła właściwe odpowiednio przy stałym ciśnieniu i stałej objętości. Zakładając małe zmiany i całkując, wykaż, że dla gazu przechodzącego adiabatyczną przemianę ze stanu początkowego 1 do stanu końcowego 2, zachodzi następująca zależność:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1}.$$

Wykaż również, że dla gazu doskonałego o $C_P = 19{,}56$ J/mol·K i $C_V = 11{,}48$ J/mol·K, który rozszerza się od początkowej objętości 2 m^3 z początkową temperaturą $T_1 = 500$ K do końcowej objętości 8 m^3, końcowa temperatura wynosi 188,5 K.

Rozwiązanie

2 Jeśli gaz doskonały ulega adiabatycznej kompresji lub rozprężaniu, nie ma utraty ciepła, a niewielka zmiana temperatury δT jest powiązana z niewielką zmianą ciśnienia δP zgodnie z równaniem

$$\frac{\delta T}{T} = \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma}\right)\frac{\delta P}{P},$$

gdzie $\gamma = \dfrac{C_P}{C_V}$ i gdzie C_P oraz C_V to ciepła właściwe odpowiednio przy stałym ciśnieniu i stałej objętości. Zakładając małe zmiany i całkując, wykaż, że dla gazu przechodzącego adiabatyczną przemianę ze stanu początkowego 1 do stanu końcowego 2, zachodzi następująca zależność:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{(\gamma - 1)/\gamma}.$$

Rozwiązanie

3 Praca W wykonywana przez gaz rozprężający się w tłoku dana jest równaniem

$$W = \int_{V_i}^{V_f} P \, \mathrm{d}V,$$

gdzie V_i i V_f są odpowiednio początkową i końcową objętością gazu, a P jest ciśnieniem wywieranym przez gaz na tłok. Ciśnienie i objętość gazu w dowolnym momencie są powiązane równaniem

$PV^\gamma = k$, gdzie k jest stałą.

Wykaż, że

$$W = \frac{P_f V_f - P_i V_i}{1 - \gamma}, \text{ gdzie } P_i = \frac{k}{V_i}, P_f = \frac{k}{V_f}.$$

Rozwiązanie

4 Siła grawitacyjna działająca między masą m a Ziemią (o masie M) wynosi

$$F = -\frac{GmM}{r^2},$$

gdzie r jest odległością od środka Ziemi do środka masy m, a G jest stałą grawitacji. Z kolei grawitacyjna energia potencjalna Φ jest powiązana z siłą grawitacyjną równaniem

$$F = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r}.$$

Wykaż, że jeśli $r = R + a$, gdzie R jest promieniem Ziemi oraz a jest wysokością masy m nad powierzchnią Ziemi, i jeśli na powierzchni Ziemi energia potencjalna jest równa zero, to

$$\Phi = \frac{GmM}{R(R+a)}a, \text{ a na małych wysokościach } \Phi \cong \frac{GmM}{R^2}a.$$

Rozwiązanie

5 Natężenie pola elektrycznego $\mathbf{E}$ w punkcie P dla liniowego rozkładu ładunku dane jest wzorem

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_i \frac{\rho(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}\,\mathrm{d}l,$$

gdzie $\mathbf{r}$ i $\mathbf{r}'$ są odpowiednio wektorami położenia punktu P i punktu na osi liniowego rozkładu ładunku, ρ jest gęstością ładunku, a ϵ_0 jest przenikalnością próżni. Wykaż, że jeśli prosta rozciągająca się od $-\infty$ do 0 wzdłuż osi x ma równomierny rozkład ładunku ρ, to natężenie pola elektrycznego w punkcie c na dodatniej osi x wyraża się wzorem

$$\mathbf{E} = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0 c}\mathbf{i}.$$

Rozwiązanie

6 Odświeżacz powietrza w kształcie kuli traci materiał równomiernie i proporcjonalnie do swojej powierzchni. Znajdź równanie różniczkowe, które opisuje tę sytuację, a następnie znajdź promień kuli jako funkcję czasu.

Odpowiedź **Rozwiązanie**

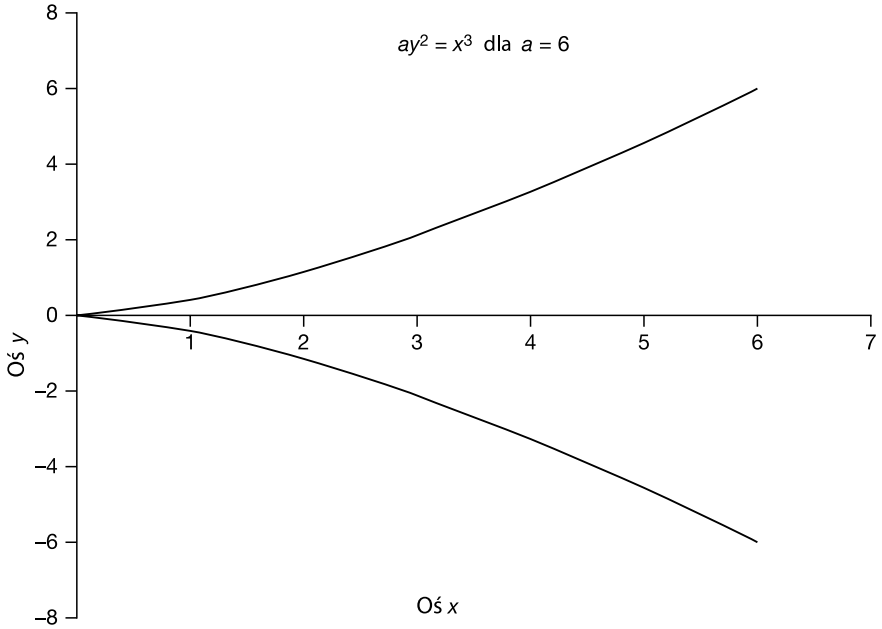
7 Środek dezynfekujący w kształcie sześcianu równomiernie traci materiał proporcjonalnie do swojej powierzchni. Znajdź równanie różniczkowe, które opisuje tę sytuację, a następnie znajdź długość boku sześcianu jako funkcję czasu.

Odpowiedź **Rozwiązanie**

8 Cząstka porusza się z przyspieszeniem $n^2 a \cos nt$ w czasie t. Jeśli zaczyna od spoczynku w czasie $t = 0$, wykaż, że jej prędkość wynosi zero w odstępach czasu π/n i że odległość między jej skrajnymi pozycjami wynosi $2a$.

Rozwiązanie

9 Ozdobny kubeczek papierowy jest formowany poprzez obrót krzywej $ay^2 = x^3$, gdzie $0 \leqslant x \leqslant a$, wokół osi y. Znajdź objętość kubeczka w zależności od wartości parametru a.



Odpowiedź **Rozwiązanie**

10 W pewnej części przędzarki włókno bawełny przechodzi przez dwie przelotki. Ze względu na ruch obrotowy występujący w procesie włókno zostaje wprawione w ruch oscylacyjny pomiędzy dwiema przelotkami i tworzy kształt wycinka okręgu obracającego się wokół jego średnicy. Znajdź objętość utworzonej w ten sposób bryły w zależności od promienia okręgu i kąta 2θ leżącego w środku naprzeciwko łuku wycinka tego okręgu.

Odpowiedź **Rozwiązanie**

11 Drugi współczynnik wirialny gazu rzeczywistego dla dowolnego potencjału $E(r)$ dany jest jako

$$B_2 = 12\int_0^\infty \left(1 - e^{-E(r)/kT}\right) r^2 \, \mathrm{d}r.$$

Znajdź B_2 dla kwadratowej studni potencjału:

$$E(r) = \begin{cases} \infty & r < a \\ -\epsilon & a < r < \alpha a \\ 0 & r > \alpha a \end{cases} \qquad \epsilon > 0,\ \alpha > 1.$$

Odpowiedź **Rozwiązanie**

Odpowiedzi

6 $r(t) = r(0) - kt$

Pytanie **Rozwiązanie**

7 $L(t) = L(0) - 2kt$

Pytanie **Rozwiązanie**

9 $\dfrac{6\pi a^{10/3}}{7}$

Pytanie **Rozwiązanie**

10 $V = 2\pi a^3 \sin\left(\dfrac{1-\sin^2\theta}{3}\right)$

Pytanie Rozwiązanie

11 $B_2 = 4a^3\left[1 + \left(\alpha^3 - 1\right)\left(1 - e^{\epsilon/kT}\right)\right]$

Pytanie Rozwiązanie

Rozwiązania

1 Mając dane $\dfrac{\delta T}{T} = -(\gamma - 1)\dfrac{\delta V}{V}$ i zakładając małe zmiany, tak abyśmy mogli całkować w przedziale pomiędzy T_1 i T_2 (odpowiednio z objętościami V_1 i V_2), otrzymujemy

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{\mathrm{d}T}{T} = -(\gamma - 1)\int_{V_1}^{V_2} \frac{\mathrm{d}V}{V}.$$

Czyli

$$\Big[\ln T\Big]_{T_1}^{T_2} = -(\gamma - 1)\Big[\ln V\Big]_{V_1}^{V_2}, \text{ zatem } \ln\frac{T_2}{T_1} = (\gamma - 1)\ln\frac{V_1}{V_2}.$$

Więc

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1}.$$

Ponadto, ponieważ $\gamma = \dfrac{C_P}{C_V}$, widzimy, że

$$\gamma - 1 = \frac{C_P}{C_V} - \frac{C_V}{C_V} = \frac{C_P - C_V}{C_P}.$$

Teraz, mając dane $C_P = 19{,}56$ J/mol·K, $C_V = 11{,}48$ J/mol·K, $V_1 = 2$ m^3, $V_2 = 8\text{m}^{\ 3}$ oraz $T_1 = 500$ K, widzimy, że skoro

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1},$$

to

$$T_2 = T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1} = T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{(C_P - C_V)/C_V}$$
$$= 500\left(\frac{2}{8}\right)^{(19{,}56 - 11{,}48)/11{,}48} = 188{,}5 \text{ K}.$$

Pytanie

2 Mając dane $\frac{\delta T}{T} = \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma}\right)\frac{\delta P}{P}$ i zakładając małe zmiany, tak abyśmy mogli całkować w przedziale pomiędzy T_1 i T_2 (odpowiednio z ciśnieniami P_1 i P_2), otrzymujemy

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{\mathrm{d}T}{T} = \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma}\right)\int_{P_1}^{P_2} \frac{\mathrm{d}P}{P}.$$

Czyli

$$\Big[\ln T\Big]_{T_1}^{T_2} = \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma}\right)\Big[\ln P\Big]_{P_1}^{P_2}, \text{ zatem } \ln\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma}\right)\ln\frac{P_2}{P_1}.$$

Więc

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}.$$

Pytanie

3

$$\begin{aligned}
W &= \int_{V_i}^{V_f} P\,\mathrm{d}V \\
&= \int_{V_i}^{V_f} \frac{k}{V^\gamma}\,\mathrm{d}V \\
&= k\int_{V_i}^{V_f} V^{-\gamma}\,\mathrm{d}V \\
&= k\left[\frac{V^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right]_{V_i}^{V_f} \\
&= k\left[\frac{{V_f}^{1-\gamma} - {V_i}^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right] \\
&= \frac{k\,\dfrac{V_f}{{V_f}^\gamma} - k\,\dfrac{V_i}{{V_i}^\gamma}}{1-\gamma} \\
&= \frac{P_f V_f - P_i V_i}{1-\gamma}
\end{aligned}$$

Pytanie

4 $F = -\dfrac{GmM}{r^2}$ oraz $F = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r}$, zatem

$$\Phi = \int_R^{R+a} \frac{GmM}{r^2}\,\mathrm{d}r = \left[-\frac{GmM}{r}\right]_R^{R+a} = \frac{GmM}{R(R+a)}a,$$

a rozdzielając zmienne otrzymamy

$$\mathrm{d}\Phi = \frac{GmM}{r^2}\,\mathrm{d}r.$$

Następnie całkujemy:

$$\int_{\Phi_1}^{\Phi_2} \mathrm{d}\Phi = \int_{r_1}^{r_2} \frac{GmM}{r^2}\,\mathrm{d}r.$$

Jeśli $r_1 = R$, to $\Phi_1 = 0$, a jeśli $r_2 = R + a$, to Φ_2 można otrzymać z całki

$$\Big[\Phi\Big]_0^{\Phi_2} = GmM\Big[-r^{-1}\Big]_R^{R+a}.$$

Czyli

$$\Phi_2 = GmM\left(-\frac{1}{R+a} + \frac{1}{R}\right) = GmM\left(\frac{R+a-R}{R(R+a)}\right) = \frac{GmMa}{R(R+a)}.$$

Gdy a jest małe w porównaniu z R, to można to zapisać jako

$$\Phi_2 = \frac{GmMa}{R(R+a)} = \frac{GmMa}{R^2(1+a/R)},$$

a ponieważ a/R jest znacznie mniejsze niż 1, to $\Phi_2 \cong \dfrac{GmMa}{R^2}$.

Pytanie

5 Element ładunku $\rho\mathrm{d}x'$ znajdujący się w x', gdzie $-\infty < x' < 0$, dokłada

$$\frac{\rho(c-x')\mathrm{d}x'}{4\pi\epsilon_0|c-x'|^3} = \frac{\rho\mathrm{d}x'}{4\pi\epsilon_0(c-x')^2}$$

do wielkości natężenia pola elektrycznego dla $\mathbf{r} = c\mathbf{i}$. Dlatego całkowite natężenie pola elektrycznego dla $\mathbf{r} = c\mathbf{i}$ otrzymujemy, całkując element ładunku po całym rozkładzie ładunku:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{0} \frac{\rho\mathrm{d}x'}{4\pi\epsilon_0(c-x')^2}\mathbf{i} &= -\int_{c+\infty}^{c} \frac{\rho\mathrm{d}u}{4\pi\epsilon_0 u^2}\mathbf{i} \\
&= -\left[-\frac{\rho}{4\pi\epsilon_0 u}\right]_{c+\infty}^{c}\mathbf{i} \\
&= -\left(-\frac{\rho}{4\pi\epsilon_0 c}\right)\mathbf{i} \\
&= \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0 c}\mathbf{i}
\end{aligned}$$

Gdzie $u = c - x'$ oraz
$\mathrm{du} = \mathrm{d(c - x')} = -\mathrm{dc'}$.

Gdzie $u = c$, gdzy $x' = 0$ oraz
$u = c + \infty$, gdy $x' = -\infty$.

Pytanie

6 Jeśli r jest promieniem kuli, to jej objętość dana jest jako $V(r) = 4\pi r^3/3$, a jej pole powierzchni jako $S(r) = 4\pi r^2$. W miarę jak kula traci materiał, zmniejsza się jej objętość i dzieje się to proporcjonalnie do jej aktualnego pola powierzchni. W związku z tym

$$\frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}t} \propto S(r), \text{ czyli } \frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}t} = -kS(r) \text{ dla } k > 0.$$

Powierzchnia zmniejsza się, ponieważ zmniejsza się promień, więc

$$\frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}4\pi r^3/3}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}4\pi r^3/3}{\mathrm{d}r} \cdot \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 4\pi r^2 \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}.$$

Tak więc otrzymujemy równość

$$-kS(r) = -4\pi k r^2.$$

Zatem

$$4\pi r^2 \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -4\pi k r^2,$$

czyli

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -k.$$

W wyniku całkowania otrzymujemy

$$r(t) = -kt + C, \text{ gdzie dla } t = 0 \text{ mamy } r(0) = -k0 + C = C.$$

Zatem

$$r(t) = r(0) - kt.$$

Pytanie Odpowiedź

7 Jeżeli L jest długością boku sześcianu, to jego objętość jest dana jako $V(L) = L^3$, a pole powierzchni jako $S(L) = 6L^2$. W miarę jak sześcian traci materiał, zmniejsza się jego objętość i dzieje się to proporcjonalnie do jego aktualnego pola powierzchni. W związku z tym

$$\frac{\mathrm{d}V(L)}{\mathrm{d}t} \propto S(L), \text{ czyli } \frac{\mathrm{d}V(L)}{\mathrm{d}t} = -kS(L) \text{ dla } k > 0.$$

Powierzchnia zmniejsza się, ponieważ zmniejsza się długość boku, więc

$$\frac{\mathrm{d}V(L)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}L^3}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}L^3}{\mathrm{d}L} \cdot \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = 3L^2 \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}, \text{ a to jest równe } -kS(L) = -6kL^2.$$

Zatem

$$3L^2 \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = -6kL^2,$$

czyli

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = -2k.$$

W wyniku całkowania otrzymujemy

$L(t) = -2kt + C$, gdzie dla $t = 0$ mamy $L(0) = -2k0 + C = C$.

Zatem

$$L(t) = L(0) - 2kt.$$

Pytanie Odpowiedź

---

8 Niech cząstka porusza się w kierunku x tak, aby jej położenie, prędkość i przyspieszenie w czasie t wyniosły odpowiednio $x(t)$, $x'(t)$ i $x''(t)$. Mamy dane, że

$$x''(t) = n^2 a \cos nt.$$

Całkując, otrzymujemy

$x'(t) = an \sin nt + C_1$, gdzie w czasie $t = 0$ mamy $x'(t) = 0$. Zatem $C_1 = 0$.

Całkując po raz kolejny, otrzymujemy

$$x(t) = -a \cos nt + C_2.$$

Ponieważ $x'(t) = na \sin nt$, to $x'(t) = 0$, gdy $\sin nt = 0$, czyli gdy $t = \pi/n$. W tych momentach cząsteczka znajduje się na jednym lub drugim krańcu swojego ruchu. Od momentu, gdy cząstka zaczyna ruch, kiedy $t = 0$ (jedno ze skrajnych położeń cząsteczki) do momentu, w którym zatrzymuje się (na drugim krańcu swojego ruchu) w chwili $t = \pi/n$, porusza się:

$$x\left(\frac{\pi}{n}\right) - x(0) = (-a\cos\pi + C_2) - (-a\cos 0 + C_2) = a + a = 2a.$$

Pytanie

---

9 Jeśli $x = 0$, to $y = 0$, a jeśli $x = a$, to $y = \pm a$.

Objętość górnej połowy kubeczka (nad osią y) dana jest jako

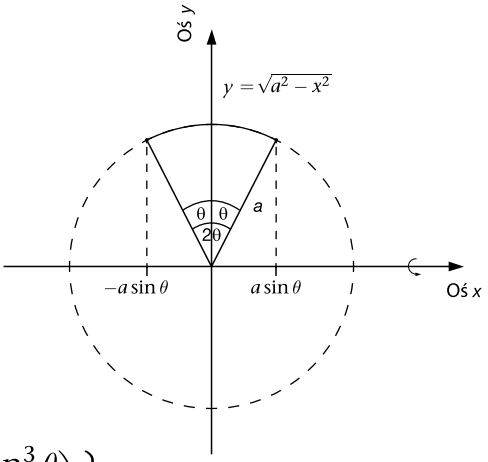
$$\int_0^a \pi x^2 \,\mathrm{d}y = \int_0^a \pi \left(ay^2\right)^{2/3} \mathrm{d}y = \int_0^a \pi a y^{4/3} \,\mathrm{d}y = \pi \left[\frac{ay^{7/3}}{7/3}\right]_0^a = \frac{3\pi a^{10/3}}{7}.$$

Zatem objętość kubeczka wynosi $\dfrac{6\pi a^{10/3}}{7}$.

Pytanie Odpowiedź

10

Równanie łuku odcinka okręgu to $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ dla $-a\sin\theta \leqslant x \leqslant a\sin\theta$.



Objętość utworzonej bryły to:

$$
\begin{aligned}
V &= \int_{-a\sin\theta}^{a\sin\theta} \pi y^2 \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-a\sin\theta}^{a\sin\theta} \pi\left(a^2 - x^2\right) \mathrm{d}x \\
&= \pi\left[a^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-a\sin\theta}^{a\sin\theta} \\
&= \pi\left\{\left(a^3\sin\theta - \frac{a^3\sin^3\theta}{3}\right) - \left(-a^3\sin\theta + \frac{a^3\sin^3\theta}{3}\right)\right\} \\
&= 2\pi a^3\sin\theta\left(1 - \frac{\sin^2\theta}{3}\right).
\end{aligned}
$$

Pytanie Odpowiedź

11

$$
\begin{aligned}
B_2 &= 12\int_0^{\infty}\left(1 - e^{-E(r)/kT}\right)r^2\,\mathrm{d}r \\
&= 12\int_0^{a}(1-0)r^2\,\mathrm{d}r + 12\int_a^{\alpha a}\left(1 - e^{\epsilon/kT}\right)r^2\,\mathrm{d}r + 12\int_{\alpha a}^{\infty}(1-1)r^2\,\mathrm{d}r \\
&= 12\int_0^{a} r^2\,\mathrm{d}r + 12\int_a^{\alpha a}\left(1 - e^{\epsilon/kT}\right)r^2\,\mathrm{d}r \\
&= 12\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{a} + 12\left[\frac{r^3}{3}\right]_a^{\alpha a}\left(1 - e^{\epsilon/kT}\right) \\
&= 4a^3 + 4a^3\left(\alpha^3 - 1\right)\left(1 - e^{\epsilon/kT}\right) \\
&= 4a^3\left[1 + \left(\alpha^3 - 1\right)\left(1 - e^{\epsilon/kT}\right)\right].
\end{aligned}
$$

Pytanie Odpowiedź